

MC-21

ACTIVIDADES DE EXPERIMENTACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Anton Aubanell Pou
aaubanel@xtec.cat

MMACA, Grup de Didàctica de la Facultat de Matemàtiques (U. Barcelona) / España

Núcleo temático: V. Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: MC.

Nivel educativo: Medio o Secundario (12 a 15 años).

Palabras clave: experimentación, recursos, materiales, actividades.

Resumen

Seguramente es discutible si las matemáticas son o no una ciencia experimental pero parece claro que el acceso al conocimiento matemático, especialmente en los niveles no universitarios, se ve muy favorecido por actividades que, partiendo de la experimentación con materiales manipulativos, conduzcan a un descubrimiento que nos permita perfilar una idea matemática que, si es necesario, podrá ser posteriormente formalizada.

En el mini curso se mostrará una selección de recursos basados en materiales, otorgando especial atención a aquellos que nos faciliten la construcción de ciclos ricos de experimentación, descubrimiento, conceptualización y formalización (cuando sea preciso) y entendiendo que un recurso de este tipo viene definido tanto por el material como por la actividad en la que es enmarcado para “darle vida” en el aula.

En paralelo a la presentación de recursos se propondrá una clasificación a partir de su intención educativa y se presentará un conjunto de consideraciones metodológicas que puedan ayudar a llevar este tipo de actividades a clase y contribuir a obtener de ellas un buen provecho didáctico.

Será un mini curso con un marcado carácter práctico, cercano al aula, en el cual se intentará conjugar recursos concretos con ideas generales.

La experimentación en clase de matemáticas

Una buena porción de la actividad escolar se desarrolla en torno a la pizarra, a los libros de textos, a los cuadernillos de ejercicios... Sin duda éstos son elementos importantes para el aprendizaje pero deberemos convenir que, en un mundo como el nuestro, donde la percepción directa y la tecnología están presentes por doquier, la aproximación al conocimiento ha de contar con medios mucho más vivenciales en armonía con el entorno en el que habitualmente se mueven nuestros alumnos. El recuerdo de la matemática escolar de muchos adultos, conciudadanos nuestros, consiste en buena parte en montones de números y fórmulas

llenando libretas o pizarras, mundos planos, habitados por símbolos estáticos escritos en blanco y negro que no siempre se han introducido de manera motivadora ni se ha dado suficiente relevancia a su aplicación o presencia en el entorno natural, social o cultural del alumno. Sin olvidar la utilidad del trabajo formal sobre cuadernos o pizarras, actualmente mucho profesorado hace un esfuerzo para poner un tercer eje a estos ecosistemas bidimensionales, el eje de la experiencia, de la mirada atenta a todo lo que nos rodea, de la utilidad, intentando mostrar que las matemáticas también se tocan, se ven y se viven. En este marco las actividades de experimentación con materiales tienen una importancia clave para hacer posible una aproximación más completa y motivadora al conocimiento matemático.

Materiales y recursos

En el contexto de nuestro minicurso parece importante distinguir entre material y recurso. Un material, de entrada, por muy sugerente que sea desde el punto de vista didáctico, no es un recurso hasta que se sumerge en una actividad que le convierta en un instrumento concreto de educación matemática para trabajar unos contenidos específicos con unos alumnos determinados. En este sentido nos parece interesante la igualdad: $\text{Recurso} = \text{Material} + \text{Actividad}$.

Un alambre, un geoplano, un atril, una baraja, una lata de refresco, unas cañitas de bebida, un dado, una maqueta, un tangram, un mosaico, unas figuras de playmóvil... son materiales que tan solo se transformaran en recursos cuando un profesor se los mire con calma, los explore, los manipule, tenga “una conversación” con ellos e imagine una actividad con que llevarlos a clase para que sus alumnos aprendan matemáticas. El material puede comprarse, construirse, guardarse en un armario... sin embargo los recursos han de ser necesariamente creados por el maestro que es quien tiene el poder y el oficio de configurar una actividad que dé “vida docente” al material.

Esta distinción entre material y recurso nos parece especialmente rica porque pone el acento en la mirada del profesor que diseña la actividad pensando en la particularidad y en la complejidad de su clase concreta.

Un mismo material puede dar lugar a distintos recursos ya que, éstos, a través de las actividades, incorporan aspectos del estilo docente del maestro y de su intención didáctica teniendo en cuenta el perfil de los alumnos y el contenido concreto que se desea trabajar. A

continuación se presenten dos ejemplos que ilustran la diversidad de recursos que puede generar un mismo material según los dos aspectos citados:

- Diversidad del paso de material a recurso atendiendo a los estilos docentes. A veces se observa que un material funciona muy bien con un profesor y no funciona en absoluto con otro, porque la actividad en la cual se ha enmarcado es distinta; un mismo material ha generado dos recursos distintos.
- Diversidad del paso de material a recurso atendiendo a los contenidos y a los niveles. Consideremos un lápiz típico con bandas amarillas y negras. En la educación infantil dos de estos lápices nos permiten comparar magnitudes. En primaria quizás los podamos medir o utilizarlos como unidad de medida, en los últimos cursos de la etapa podremos reconocer las figuras geométricas que forman el lápiz (un prisma hexagonal y un cono). En la ESO podremos calcular volúmenes y áreas laterales y en el bachillerato descubriremos que las curvas que forman el contorno del cono de la punta cuando se corta con las seis caras del prisma son ramas de hipérbola. Obsérvese como el mismo lápiz ha generado recursos distintos según el contenido tratado y los niveles del alumnado.

Así pues es la mirada del maestro la que crea el recurso a partir de un material, enmarcándolo en una actividad específica. En este sentido podríamos describir el “ciclo vital” de un recurso material:

- **Nace**, a partir de un simple objeto, cuando un profesor lo selecciona, confía en que sea útil para sus alumnos y establece una dinámica docente para llevarlo al aula.
- **Crece** sumergido en el ambiente de la clase, alimentándose de cosas tan reales e indefinidas como el interés de los alumnos, el entusiasmo del profesor, las ganas de descubrir, la sorpresa...
- **Se reproduce** en forma de ideas matemáticas que quedaran en los alumnos.
- **Muere** cuando, habiendo dado su fruto didáctico vuelve a ser un simple objeto que esperará a que una nueva mirada didáctica le dé vida una vez más como recurso.

Esta distinción entre la idea de material y la idea de recurso es especialmente rica porque pone el acento en la actividad de experimentación que se desarrolla en clase. En este sentido

nuestro curso no quiere ser tanto una muestra de materiales como una presentación de recursos, atendiendo a las actividades de experimentación que conllevan.

Una clasificación de las actividades de experimentación

Las actividades de experimentación en clase pueden clasificarse a partir de diversos criterios: según los niveles educativos donde se aplican, según los contenidos que permiten trabajar, según el tipo de materiales que se manejan (adquiridos, preparados por el docente o contruidos como parte de la actividad), según la agrupación de los alumnos (las que se realizan individualmente, en equipos reducidos o con todo el grupo)... A continuación se propone una clasificación de las actividades de experimentación según su intención didáctica en clase de matemáticas i, al hilo de esta clasificación, se presentan ejemplos ilustrativos de cada categoría.

- **Actividades para descubrir la presencia de las matemáticas** en nuestro entorno, para educar la mirada matemática de los alumnos. Desde exposiciones o concursos de fotografía matemática (en los cuales la foto es tan importante como el lema que refleja la lectura que se ha hecho de la imagen) hasta la interpretación matemática de actividades cotidianas (compras, desplazamientos, juegos...) y de objetos de uso habitual como los embalajes (latas, briks, cajas, botellas, frascos...), los periódicos y revistas, las creaciones de diseño (logos, joyas, pequeñas esculturas...), la arquitectura y el paisaje, los planos y mapas...
- **Actividades para motivar.** Se trata de actividades que promueven la atención de los alumnos respecto de un tema determinado. Un bonito ejemplo de una actividad de este tipo es una especie de juego de pistas donde van apareciendo objetos relacionados con distintos sistemas de numeración: desde la reproducción sobre arcilla de símbolos cuneiformes que representan números en base 60, hasta la tablilla babilónica YBC-7289 (entre el 1800 aC y el 1600 aC) donde aparece una aproximación al que hoy llamamos teorema de Pitágoras, desde unas piedrecitas para introducir los *calculus* romanos, hasta la escritura, sobre un papiro, de un número en notación egipcia antigua...
- **Actividades para simular** que permiten reproducir el comportamiento de un sistema bajo condiciones simplificadas. Los ábacos, más allá de su importancia histórica, son

excelentes simuladores del funcionamiento de la notación posicional (aunque normalmente son de base 10, inmovilizando algunas bolas, permiten simular bases inferiores a 10). En el campo de la probabilidad, la máquina de Galton permite realizar bonitas simulaciones de la distribución binomial, aproximación discreta a la distribución normal y a la campana de Gauss. En esta categoría debemos incluir también determinados role-plays como los de coordenadas para simular la representación gráfica de condiciones algebraicas (ecuaciones, inecuaciones, sistemas, problemas de programación lineal...) o los de simulación de curvas de persecución (como la tractriz) o de curvas de ángulo constante (como la espiral de Bernoulli).

- **Actividades de construcción de objetos matemáticos.** Hay que destacar la construcción de poliedros a partir de materiales que suelen resultar muy atractivos para los alumnos (lokon, creator, polydron, polydron magnético, poliedros gigantes con tubos de PVC o cañitas de bebida...). Estas actividades no tan solo permiten familiarizarse con las formas tridimensionales sino también con las secciones, las proyecciones, los desarrollos... Igualmente, en este grupo, podemos incluir actividades que permiten el trazado de curvas (por ejemplo la construcción de cónicas con cordeles, reglas, escuadras y clavos) o la transformación de figuras planas (por ejemplo el uso del pantógrafo para la construcción de figuras homotéticas). Estas actividades están muy vinculadas a la definición y a las propiedades del objeto matemático que se desea construir y, por tanto, su interés no radica sólo en el resultado final, sino sobre todo en el proceso de construcción que pone en evidencia las razones por las cuales se obtiene este resultado.
- **Actividades para demostrar propiedades.** En matemáticas para que un trayecto deductivo se considere una demostración requiere un preciso encadenamiento lógico de los pasos, pero esto no significa que no puedan hacerse demostraciones absolutamente rigurosas a partir de la experimentación. En este sentido debemos referirnos a las bonitas demostraciones dinámicas del teorema de Pitágoras a partir de la manipulación de figuras y de la comparación de sus áreas, o a las actividades que pueden hacerse en torno al tan formativo como olvidado teorema de Viviani, o a las demostraciones con policubos de fórmulas aritméticas inductivas... El libro *Math Made Visual. Creating Images for*

Understanding Mathematics de Claudi Alsina y Roger B. Nelsen presenta magníficas sugerencias de este tipo de actividades.

- **Actividades para mostrar propiedades.** Empleamos el término “*mostrar*” en lugar de “*demostrar*” para referirnos a la argumentación de una propiedad a través del uso inteligente del sentido común, la analogía, la intuición... desarrollando razonamientos plausibles que el alumno pueda entender fácilmente aunque no puedan considerarse estrictamente demostraciones rigurosas. Son ejemplos de este tipo de actividades las comparaciones de volumen de cuerpos tridimensionales llenando uno de ellos de agua (o de mijo, o de arroz...) y traspasando el contenido a otro (prismas y pirámides de igual base y de igual altura, cilindros y conos, cilindros de igual área lateral pero distinta altura...) o determinadas experiencias que permiten introducir el número pi y las fórmulas de la longitud de una circunferencia y del área de un círculo. Si bien no se trata de demostraciones, estas actividades ofrecen un razonamiento plausible que, a nivel de la ESO, muchas veces no tiene otra alternativa que la simple memorización ya que una demostración rigurosa requeriría técnicas matemáticas avanzadas.
- **Actividades para plantear o para resolver problemas.** Algunos autores afirman que hacer matemáticas consiste básicamente en resolver problemas. Independientemente del mayor o menor grado de acuerdo con esta afirmación, lo cierto es que determinadas actividades experimentales permiten plantear bonitos problemas (por ejemplo, en la actividad de obtención de funciones a partir del llenado de botellas relacionando el volumen aportado de líquido con la altura alcanzada dentro del recipiente, surgen preguntas muy interesantes que relacionan el perfil funcional con la forma de la botella), otras actividades facilitan la búsqueda de la solución a un problema (por ejemplo el recubrimiento de un tablero de ajedrez con piezas rectangulares que cubran exactamente dos cuadrados permite encauzar la resolución de algunos problemas sobre recubrimientos parciales) y otras permiten crear ambientes de resolución de problemas (ferias escolares, exposiciones de materiales matemáticos que plantean retos...).
- **Actividades para visualizar ideas matemáticas.** En este grupo incluimos actividades que, a partir de un entramado matemático (que será necesario explicitar), producen formas con mucha fuerza visual jugando con la sorpresa, la estética, la emoción...

Algunos ejemplos de este tipo de actividades son las experiencias de geometría con pompas de jabón donde se forman superficies minimales, la composición dinámica de homotecias, simetrías y giros con una televisión, un espejo y una cámara de vídeo conectada a la propia televisión o la generación de diagramas de Chladni produciendo vibraciones en una placa sobre la que se coloca arena fina.

- **Actividades para aplicar conocimiento matemático.** La matemática nos ayuda a comprender y a interactuar con el mundo que nos rodea y, por tanto, es importante poner de manifiesto sus aplicaciones. Un buen ejemplo de actividad experimental de este tipo es el estudio de los rebotes de un rayo láser en perfiles cónicos y su aplicación a los faros de los automóviles o a las antenas parabólicas. Otro bonito ejemplo es el descubrimiento práctico de la reducción que se produce al dibujar el perfil de una cara sobre un espejo y su interpretación como aplicación del teorema de Tales. Y aún otro ejemplo muy atractivo es la creación, con instrumentos matemáticos, de imágenes anamórficas y su aplicación en la publicidad y en el cine.

Consideraciones sobre el uso de actividades de experimentación en el aula

En este apartado se expondrán algunas reflexiones (que abarcan aspectos diversos, desde creencias y estilos docentes hasta indicaciones metodológicas) sobre la utilización de actividades de experimentación en clase de matemáticas. Concretamos estas observaciones en los ocho puntos siguientes.

- Cada profesor usa recursos que, desde su particular estilo profesional, enriquecen su acción educativa. Es importante que los docentes se sientan orgullosos de aquellas actividades que les funcionan en clase, que son motivadoras, que transmiten eficientemente conceptos matemáticos... Sólo así se tendrá ilusión por mejorar y ganas de compartir ideas.
- En un camino constante de renovación metodológica, es necesario ir incorporando nuevos recursos sin prisa pero sin pausa. Balzac decía que *la resignación es un suicidio cotidiano* y, casi por simetría, podríamos afirmar que la innovación docente es una manera de mantenernos en “buena forma” profesional. Siendo pues imprescindible la

incorporación constante de nuevos recursos, el proceso debe hacerse sin prisa para asegurar una reflexión serena y una adaptación correcta al estilo propio.

- Las actividades de experimentación no trivializan ni son útiles exclusivamente para las primeras etapas escolares. En la educación secundaria obligatoria y postobligatoria este tipo de actividades pueden jugar un papel importante. El profesor P. Puig Adam, en el libro citado en la bibliografía, describe actividades de experimentación que le permiten tratar contenidos muy avanzados. A título de ejemplo cabe mencionar una actividad con mosaicos formados por triángulos rectángulos isósceles y rombos en la cual, a partir de la inconmensurabilidad de magnitudes, se obtienen interesantes ideas sobre irracionales cuadráticos. Se trata de una espléndida demostración de que las actividades de experimentación no se oponen a la abstracción, necesaria en etapas educativas avanzadas, sino que pueden ayudar a progresar hacia ella.
- No se deben contraponer las actividades de experimentación y los recursos tecnológicos ya que ofrecen experiencias distintas y, en muchas ocasiones, complementarias. Este es el caso de construcciones geométricas con materiales manipulativos y construcciones realizadas con GeoGebra.
- En muchas actividades es interesante distinguir cuatro fases: experimentación, descubrimiento, conceptualización y formalización (si es necesaria). Por ejemplo, si tomamos cilindros de plastilina de diferentes diámetros, los envolvemos con varias vueltas de papel y los cortamos siguiendo planos que forman ángulos distintos con el eje de los cilindros, descubriremos funciones sinusoidales y relacionaremos los diámetros y los ángulos mencionados con la longitud de onda y la amplitud de las sinusoidales obtenidas. En esta actividad pueden distinguirse las fases indicadas.
- Las actividades de experimentación han de quedar bien enlazadas con el resto de tareas de clase, no han de aparecer como “algo” distinto, excepcional, aislado del quehacer normal. Sólo así aportarán todos sus frutos didácticos.
- Es bueno que quede siempre rastro de la actividad de experimentación realizada (un escrito en el cuaderno, una fotografía, un dibujo, una entrada en un blog...), de lo contrario puede acabar olvidada o ser simplemente un recuerdo anecdótico.

- Las actividades de experimentación deben tener presencia en la evaluación, una presencia que puede tener distintas concreciones, pero que es importante en sí misma para que el alumno otorgue a estas actividades el valor que se merecen.

Para terminar es fundamental subrayar que hay un ingrediente que debería impregnar todas las actividades educativas y, en particular, las actividades de experimentación: la emoción positiva, el entusiasmo. Con emoción, actividades mediocres se convierten en excepcionales. Sin emoción, buenas actividades se hacen mediocres. Y la mejor manera de emocionar es emocionándonos, la mejor manera de entusiasmar es entusiasmándonos.

Referencias bibliográficas

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1991). *Materiales para construir la geometría* (Matemáticas: cultura y aprendizaje, 11). Madrid: Síntesis.

Alsina, C. y Nelsen, R. B. (2006). *Math Made Visual. Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: MAA.

Castelnuovo, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. México, D.F.: Trillas.

National Council of Teachers of Mathematics. Illuminations. <http://illuminations.nctm.org/>
Consultado 05/01/2017.

Puig Adam, P. *Didáctica Matemática Eurística*.(1956). Madrid: Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.